

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE 1, AA 04/05
TEST N. 3 DEL 14/12/04

Sia fissato uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) , preso p , $1 \leq p \leq \infty$, indichiamo $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

- (1) Sia fissato p , $1 \leq p \leq \infty$. Sia $\{f_n\}$ una successione in L^p tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è convergente in L^p e vale

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p .$$

- (2) Sia $f \in L^p$ per qualche p , $1 \leq p < \infty$. Poniamo $\mu(t) = \mu\{|f| > t\}$ per ogni $t \geq 0$. Provare

$$\int |f|^p = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu(t) dt .$$

- (3) Provare che prese funzioni f, g, h misurabili ed esponenti $p, q, r \geq 1$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 ,$$

vale

$$\int |fgh| \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r .$$

- (4) Presa $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, provare che esiste una successione di funzioni semplici $\{f_n\}$ tali che $\{f_n\} \rightarrow f$ nel senso di L^p .